سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt[3]{A} = (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

می‌دانیم $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$، پس $2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1}$، بنابراین:

$$= (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\left((2-\sqrt{3})^{-1}\right)^{\frac{4}{3}}\sqrt[6]{2}$$

$$= \left((2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(2-\sqrt{3})^{\frac{-4}{3}}\right)2^{\frac{1}{6}} = (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}2^{\frac{1}{6}}$$

$$= (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}(2)^{\frac{1}{6}} = (4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}} = (3+1-2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}$$

$$= ((\sqrt{3}-1)^{2})^{\frac{1}{6}} = (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow A = \sqrt{3}-1$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

عبارات درون پرانتز و عبارت توان را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$2\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{(2-1)} = 2$$

$$(1-\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = (1)^{3}-(\sqrt[3]{2})^{3} = 1-2 = -1$$

پس حاصل عبارت داده شده برابر است با: $(2)^{-1} = \frac{1}{2}$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

عدد x منفی است، پس:

$$A = \sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{64x^{2}}}} = \sqrt[3]{\frac{x}{8\times|x|}} \xrightarrow{x<0} \sqrt[3]{\frac{x}{-8x}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از اتحاد $(a+b)^{3} = a^{3}+b^{3}+3ab(a+b)$ داریم:

$$x^{3} = (\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^{3} = (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)+$$

$$3(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})$$

$$\Rightarrow x^{3} = 2\sqrt{2}+3\times1\times x \Rightarrow x^{3}-3x = 2\sqrt{2}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

$$A = \left[(\sqrt{6} - \sqrt{5})^{2}\right]^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \times (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = (6 + 5 - 2\sqrt{30})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = [(11 - 2\sqrt{30})(\sqrt{6} + \sqrt{5})]^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = (11\sqrt{6} + 11\sqrt{5} - 12\sqrt{5} - 10\sqrt{6})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = (\sqrt{6} - \sqrt{5})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول:

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = (\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^{2}} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^{2}}$$

$$= \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3}$$

راه حل دوم: عبارت $X = (\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$X^{2} = (\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})^{2}(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^{2}$$

$$= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})})\sqrt[3]{8}$$

$$\Rightarrow X^{2} = (4 + 2\sqrt{4 - 3}) \times 2 = 12 \Rightarrow X = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{2}$$

$$\Rightarrow (7 + 4\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1} = ((2 + \sqrt{3})^{2})^{\sqrt{2}-1} = (2 + \sqrt{3})^{2\sqrt{2}-2}$$

از طرفی $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$، بنابراین: $(2 + \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})^{-1}$

$$\Rightarrow (7 + 4\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1}(2 - \sqrt{3})^{2\sqrt{2}-3}$$

$$= (2 + \sqrt{3})^{2\sqrt{2}-2}(2 + \sqrt{3})^{-2\sqrt{2}+3} = (2 + \sqrt{3})$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا دقت کنید که: $(\sqrt{۲}+۱)^{۲} = ۳+۲\sqrt{۲}$ و $(\sqrt{۲}+۱)^{-۱} = (\sqrt{۲}-۱)$ پس:

$$(\sqrt{۲}+۱)^{-۲\sqrt{۲}}(\sqrt{۲}+۱)^{۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}} = (\sqrt{۲}+۱)^{۲\sqrt{۲}}.(\sqrt{۲}-۱)^{۲\sqrt{۲}}(۳+۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

$$= (\sqrt{۲}+۱)^{۲\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^{۲\sqrt{۳}}} = (\sqrt{۲}+۱)^{\sqrt{۳}}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که اگر عددی بین صفر و یک در عدد مثبت a ضرب شود، حاصل کوچکتر از a خواهد بود، بنابراین برای عدد $۰ < a < ۱$ داریم $a > a^{۲} > a^{۳} > a^{۴} > a^{۵}$، بنابراین در مورد ریشه‌های آن می‌توان گفت که اگر a عددی بین صفر و یک باشد، آنگاه $a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a} < \sqrt[۵]{a}$ پس با توجه به محورها، می‌توان گفت $a_{۲} = \sqrt[۳]{a}$، $a_{۳} = \sqrt[۴]{a}$ و $a_{۴} = \sqrt[۵]{a}$.

همچنین می‌دانیم که هر عدد مثبت دو ریشه‌ی چهارم قرینه دارد. پس از آنجا که $a_{۱}$ منفی است، می‌توان گفت $a_{۱}$ نیز ریشه‌ی چهارم a است؛ به‌عبارت دیگر $a_{۱} = -\sqrt[۴]{a}$.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۱: b ریشه n اُم a است، هرگاه $b^{n} = a$.

گزینه ۲: اگر فرض کنیم $a = -۲$ و n زوج است: $\sqrt[n]{(-۲)^{n}} = +۲$

اما $\sqrt[n]{-۲}$ وجود ندارد.

گزینه ۳: $\sqrt[n]{a^{n}} = |a|$